

3 次元電磁カスケード B 近似理論 エネルギー流ラテラル分布関数の計算

II. 解析接続の方法に基づく計算

新 居 誠 彦*

A Calculation of Energy-flow Lateral Distribution Function under Approximation B

in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.

II. Application of Analytic Continuation to Calculate

Energy-flow Lateral Distribution Function.

NII Nobuhiko

Abstract

By using the method of analytic continuation proposed by Nishimura, we calculate the energy-flow lateral distribution function under Approximation B in the three-dimensional cascade theory.

Keywords : *three-dimensional cascade theory, energy-flow lateral distribution function, Approximation B, method of analytic continuation.*

1. はじめに

J. Nishimura は電磁カスケード理論において複素平面上で計算する解析接続の方法を提唱している。いくつかの結果を導いている。本稿で 3 次元 B 近似エネルギー流ラテラル分布関数の計算を解析接続法に基づいて行う。その前に Nishimura の示した道筋を辿って 1 次元理論と 3 次元理論の結果を検証する。

2. 1 次元 B 近似解の検証

2.1. Nishimura の方法

Nishimura の与えた 1 次元 B 近似解 (遷移曲線微分型) は, ¹⁾

$$\pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\varepsilon}{E} \right)^n \phi_n(s, t), \quad (2.1)$$

$$\phi_n(s, t) = (s+n) \int_0^t \phi_0(s+n, t-t') \phi_{n-1}(s, t') dt',$$

$$\phi_0(s, t) = H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t}. \quad (2.2)$$

Nishimura は(2.1)の級数の和 S を解析接続によって複素平面へ拡張して計算する。

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} dq \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \phi(q, s, t),$$

$$\phi(n, s, t) = \phi_n(s, t). \quad (2.3)$$

遷移曲線の積分型は

$$\Pi(E_0, E, t) = \int_E^{\infty} \pi(E_0, E, t) dE.$$

電磁カスケードの中に入射エネルギーより大きいエネルギーは存在しないので積分範囲の上限は入射エネルギー $E_0 < \infty$ でなければならない。

しかし Nishimura は ∞ とする。こうすれば複素平面に極が出現するため q -積分に留数定理の利用が考えられる。

$$\Pi(E_0, E, t) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_c \int_{\delta} \frac{ds dq}{s+q} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s$$

$$\times \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \Gamma(-q) \mathfrak{M}(s, q, t), \quad (2.4)$$

$$\mathfrak{M}(s, q, t) = \Gamma(q+1) \phi(q, s, t). \quad \ast)$$

$q = -s$ を極と見做して積分に留数定理を適用する。このときエネルギー E は消去される。この

ことから $E = 0$ の極限として正確に $\Pi(E_0, 0, t)$

が得られると Nishimura は結論する。

$$\Pi(E_0, 0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c ds \left(\frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \Gamma(s) \mathfrak{M}(s, -s, t). \quad (2.5)$$

.....

※) (2.2)の漸化式に由来する因子 $(s+q)!/s!$

が $\phi(q, s, t)$ の中に存在する。

【Nishimura の定式化の記述はこの段階まで】

$\mathfrak{M}(s, -s, t) = \Gamma(-s+1) \phi(-s, s, t)$ である。特異点をもつこのガンマ関数はどう処理されるか。ここから先の \mathfrak{M} -関数の実体が明示されていない。

(2.4)以降の計算と \mathfrak{M} -関数を、著者自身の計算方法を踏まえた後、§ 2.5 で述べる

2.2. 実数の範囲内で計算する著者の方法

(2.1)の n に関する和を実数の範囲で求める方法を著者は提案した。²⁾ (2.2)の $\phi_n(s, t)$ は主要項近似***)のもとで次のように表すことができる：

$$\phi_n(s, t) = \rho_n(s) H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}. \quad (2.6)$$

$\rho_n(s)$ は漸化式から求められる (第Ⅲ稿 § 2)。

$$\pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{E} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+n)!}{s!} \left(-\frac{\varepsilon}{E} \right)^n \rho_n(s). \quad (2.7)$$

n の和を $S = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n}{n} \left(-\frac{\varepsilon}{E} \right)^n n! \rho_n(s)$ と表し、

$n! \rho_n(s)$ に Prony 内挿法³⁾ を適用して

$$n! \rho_n(s) = \sum_{k=1}^N a_k(s) b_k(s)^n \quad (2.8)$$

と表す。 $2N$ 個の $a_k(s), b_k(s)$ ($k=1, 2, \dots, N$)

は $2N$ 個の既知数 $\rho_n(s)$ ($n=0, 1, \dots, 2N-1$) から

一意的に定まる。

$$S = \sum_{k=1}^N a_k(s) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n}{n} \left(-\frac{\varepsilon b_k(s)}{E} \right)^n$$

.....

***) $H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \approx 0$ とする近似。 $t \gtrsim 2$ なら近似が可能。

は $\varepsilon b_k(s)/E < 1$ なら和が存在する。

この条件が満足されるような大きい E を対象にすると,

$$S = \sum_{k=1}^N \frac{a_k(s)}{(1 + \varepsilon b_k(s)/E)^{s+1}}.$$

この分母は被積分関数中の E^{-s-1} と結びついて,

$$\begin{aligned} \pi(E_0, E, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \sum_{k=1}^N \frac{a_k(s)}{(E + \varepsilon b_k(s))^{s+1}}. \end{aligned}$$

ここで $\varepsilon b_k(s)/E < 1$ の条件は解除される。

以降で極限 ($E \rightarrow 0$) が可能となる。

積分型 $\Pi(E_0, E, t)$ を求めるエネルギー積分は現象に則して上限を $E_0 < \infty$ にとる。

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, E, t) &= \int_E^{E_0} \pi(E_0, E, t) dE \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \sum_{k=1}^N a_k(s) \\ &\times \left(\frac{1}{(E + \varepsilon b_k(s))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon b_k(s))^s} \right). \quad (2.9) \end{aligned}$$

(i) 閾エネルギーゼロ ($E \rightarrow 0$) の表式は,

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, 0, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \sum_{k=1}^N a_k(s) \left\{ b_k(s)^{-s} - \left(\frac{\varepsilon}{E_0 + \varepsilon b_k(s)} \right)^s \right\}. \\ \sum_{k=1}^N a_k(s) b_k(s)^{-s} &\text{はいわゆる Rossi-Greisen の } K \end{aligned}$$

関数, $K_1(s, -s)$, を与える。 ^{2), 4), 5)}

$\varepsilon \ll E_0$ を考慮して { } 内第 2 項を無視すると,

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, 0, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} K_1(s, -s). \end{aligned}$$

既知の表式 ⁶⁾ が得られる。

(ii) $\varepsilon \ll E \ll E_0$ なるエネルギーを対象にして

$\varepsilon = 0$ とおき, $(E/E_0)^s \ll 1$ か $\sum_{k=1}^N a_k(s) = 1$ (恒等式) を使えば A 近似の表式 ⁶⁾ が得られる。

$$\Pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}.$$

2.3. 積分エネルギースペクトル

(2.9) は E が消去される Nishimura の結果と異なりエネルギーの全範囲にわたる。(2.9) は遷移曲線の積分エネルギースペクトルを表す。

2.4. 解析接続法の適用

実数の範囲における前述の計算を Nishimura が提唱した解析接続の方法に基づいて実行する。(2.7) の n に関する和 S を解析接続によって複素平面へ拡張する:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi i} \int_\delta dq \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \frac{(s+q)!}{s!} \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \rho(q, s), \\ \rho(n, s) &= \rho_n(s). \end{aligned}$$

Prony 内挿法が複素平面でも成り立つとする:

$$\begin{aligned} \Gamma(q+1) \rho(q, s) &= \sum_{i=1}^N a_i(s) b_i(s)^q. \\ \pi(E_0, E, t) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_c \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{E} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \sum_{i=1}^N a_i(s) \int_\delta dq \Gamma(-q) \frac{(s+q)!}{s!} \left(\frac{\varepsilon b_i(s)}{E} \right)^q. \end{aligned}$$

(E, E_0) の範囲で積分すると,

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, E, t) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \int_\delta dq \Gamma(-q) \frac{(s+q-1)!}{s!} \sum_{i=1}^N a_i(s) (\varepsilon b_i(s))^q \\ &\times \left(\frac{1}{E^{s+q}} - \frac{1}{E_0^{s+q}} \right). \end{aligned}$$

関数 $\Gamma(-q)$ は $q = k$ ($= 0, 1, 2, \dots$) に極をもつ (留

数は $(-1)^k/k!$). q の積分を Q と表す。極を含む

ように積分路[※] をとり留数定理を適用すると

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^N a_i(s) \\ &\times \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{k} (-\varepsilon b_i(s))^k \left(\frac{1}{E^{s+k}} - \frac{1}{E_0^{s+k}} \right) \\ &= \frac{1}{s} \sum_{i=1}^N a_i(s) \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon b_i(s))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon b_i(s))^s} \right\}. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, E, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \sum_{i=1}^N a_i(s) \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon b_i(s))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon b_i(s))^s} \right\}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

実数の範囲で計算した(2.9)と一致する。これが

A 近似遷移曲線 ($\varepsilon \ll E \ll E_0$) や閾値ゼロの B

近似遷移曲線 ($E \rightarrow 0, \varepsilon \ll E_0$) を含むことは

§ 2.2 でみた通りである。

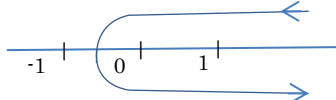
2.5. Nishimura の方法を顧みる

Nishimura は明示していないが, (2.2) に起因す

る因子 $(s+q)!/s!$ が (2.4) の $\phi(q, s, t)$ に含まれ

る。それを頭にして (2.4) から先の計算を試みる。

※) 積分路 δ



主要項近似のもとで $\mathfrak{M}(q, s, t)$ は次のように表される :

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(q, s, t) &= \Gamma(q+1) \frac{(s+q)!}{s!} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \rho(q, s), \\ \rho(n, s) &= \rho_n(s). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nishimura が極をもつと見做した因子 $1/(s+q)$

は $(s+q)!$ の中の一つの因子と相殺する。

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, E, t) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_c ds \left(\frac{E_0}{E} \right)^s H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \int_\delta dq \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \\ &\times \frac{(s+q-1)!}{s!} \rho(q, s). \end{aligned} \quad (2.12)$$

一方, $(s+q-1)!$ すなわち $\Gamma(s+q)$ は $q = -s-k$

($k = 0, 1, \dots$) に極をもつ ($k=0$ の極は Nishimura の指摘する極だがそれとは起源が異なる)。

q ・積分に留数定理を用いる。 $\Gamma(-k)$ の留数は

$(-1)^k/k!$ であるから,

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, E, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c ds \left(\frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{E}{\varepsilon} \right)^k \frac{\Gamma(s+k)}{s!} \Gamma(-s-k+1) \\ &\times \rho(-s-k, s). \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで $E \rightarrow 0$ とする。 $k=0$ の項のみが残り,

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, 0, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c ds \left(\frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \frac{\Gamma(s)}{s!} \Gamma(-s+1) \rho(-s, s). \end{aligned} \quad (2.14)$$

$\Gamma(-s+1) \rho(-s, s)$ に § 2.4 で示した Prony 内挿

法の表記を適用すると次式が成り立つ :

$$\Gamma(-s+1)\rho(-s,s) \\ = \sum_{i=1}^N a_i(s)b_i(s)^{-s} = K_1(s,-s). \quad (2.15)$$

また $\Gamma(s)/s! = 1/s$. よって,

$$\Pi(E_0, 0, t) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} K_1(s, -s). \quad (2.16)$$

閾値ゼロのよく知られた B 近似遷移曲線に到達する。

2.6. 結論 1

(1) 解析接続の方法を用いて得た(2.10)は実数の範囲での計算から得た(2.9)に一致する。著者の計算において、Nishimura が極をもつとした

$1/(s+q)$ は $(s+q)!$ 中の因子と相殺する。

(2) Nishimura の計算において $\phi(q, s, t)$ に含ま

れる $(s+q)!/s!$ をおもてに出せば $\Gamma(s+q)$ の存在が見える。この関数のもつ無限個の極を q ・積分に用いればエネルギー E は陽に存在する。この段階で $E \rightarrow 0$ とすると $q = -s$ の極のみが寄与して閾値ゼロの表式 $\Pi(E_0, 0, t)$ が得られる。

(3) $\mathfrak{M}(s, -s, t)$ に顕在していた $\Gamma(-s+1)$ は K 関数 $K_1(s, -s)$ へ昇華して特異点は解消する。

(4) $(s+q)!/s!$ なる因子を処理すれば正しい結果が得られる。Nishimura はこの因子に言及していない。もしあれば別の展開になったであろう。

3. 3次元 B 近似解の検証

3.1. Nishimura の方法

電子数積分ラテラル分布関数 $\Pi_2(E_0, E, r, t)$

は微分型 $\pi_2(E_0, E, r, t)$ をエネルギーで積分して得られる。このとき Nishimura は 1 次元理論と同様に上限を ∞ にとる。

$$\Pi_2(E_0, E, r, t) = \int_E^\infty \pi_2(E_0, E, r, t) dE. \quad (3.1)$$

微分型は関数 $f_2(E_0, E, x, t)$ をハンケル変換して得られる：

$$\pi_2(E_0, E, r, t) = \int_0^\infty f_2(E_0, E, x, t) J_0(rx) x dx,$$

$$f_2(E_0, E, x, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{E} \\ \times \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \left(-\frac{E_s^2 x^2}{4E^2} \right)^m \left(-\frac{\varepsilon}{E} \right)^n \phi_{mn}(s, t), \quad (3.2)$$

$$\phi_{mn}(s, t) = \lim_{(\xi-t) \rightarrow 0} \Phi_{mn}(s, \xi-t, t),$$

$$\Phi_{mn}(s, \xi-t, t) \\ = \int_0^t \Phi_{00}(s+2m+n, t-t') \\ \times \{ (\xi-t')^2 \Phi_{m-1n}(s, \xi-t', t') \\ + (s+2m+n) \Phi_{mn-1}(s, \xi-t', t') \} dt'.$$

$$\Phi_{00}(s, t) = \phi_{00}(s, t) = H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t}.$$

$f_2(E_0, E, x, t)$ の中に存在する x^{2m} のハンケル変

換は恒等的にゼロ, $\int_0^\infty x^{2m+1} J_0(rx) dx = 0$, を与えるため有意義な結果が得られない。この状況を克服するために Nishimura は f_2 の 2 重和 S を解

析接続によって複素平面へ拡張してハンケル変換を実行する。すなわち

$$S = -\frac{1}{4\pi^2} \int \int dp dq \Gamma(-p) \Gamma(p+1) \times \\ \times \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \left(\frac{E_s^2 x^2}{4E^2} \right)^p \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \phi(p, q, s, t)$$

と表して次の公式を用いる：

$$\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{4} \right)^p J_0(rx) x dx = \frac{2\Gamma(p+1)}{\Gamma(-p)} (r^2)^{-p-1}. \quad (3.3)$$

$$\pi_2(E_0, E, r, t) = -\frac{1}{8\pi^4 i} \int_c \int \int ds dp dq \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{1}{E} \left(\frac{E}{E_s} \right)^2 \\ \times \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \left(\frac{E^2 r^2}{E_s^2} \right)^{-p-1} \Gamma(p+1) \Gamma(-q) \mathfrak{M}_2(p, q, s, t).$$

$$\mathfrak{M}_2(p, q, s, t) = \Gamma(p+1) \Gamma(q+1) \phi(p, q, s, t), \\ \phi(m, n, s, t) = \phi_{mn}(s, t).$$

$$\Pi_2(E_0, E, r, t) = \int_E^\infty \pi_2(E_0, E, r, t) dE \\ = -\frac{1}{8\pi^4 i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \int \int \frac{ds dp dq}{s+2p+q} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \left(\frac{E}{E_s} \right)^2 \\ \times \left(\frac{\varepsilon}{E} \right)^q \left(\frac{E^2 r^2}{E_s^2} \right)^{-p-1} \Gamma(p+1) \Gamma(-q) \mathfrak{M}_2(p, q, s, t). \quad (3.4)$$

Nishimura は $q = -s - 2p$ を極と見做す。 q -積分に留数定理を適用すると E が消去される。その結果を、 $E = 0$ の極限での正確な表式であるとして次式を示す。

$$\Pi_2(E_0, 0, r, t) \\ = -\frac{1}{4\pi^3} \int_{-i\infty}^{i\infty} \int ds dp \left(\frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \left(\frac{\varepsilon}{E_s} \right)^2 \left(\frac{E^2 r^2}{E_s^2} \right)^{-p-1} \\ \times \Gamma(p+1) \Gamma(s+2p) \mathfrak{M}_2(p, -s-2p, s, t). \quad (3.5)$$

体積 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^\infty \Pi_2(E_0, 0, r, t) 2\pi r dr$ を求めると因

子 $(1/\delta^2)^p / p$ が現れる。 $p=0$ を極と見做し p ・

積分に留数定理を用いて、

$$\int_0^\infty \Pi_2(E_0, 0, r, t) 2\pi r dr \\ = \frac{1}{2\pi i} \int ds \left(\frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \Gamma(s) \mathfrak{M}_2(0, -s, s, t).$$

これが 1 次元 B 近似の遷移曲線(2.5)に一致すると述べている。【Nishimura の記述はここまで】

3.2. 結論 2

(1) 複素平面でのハンケル変換を導入した Nishimura の功績は極めて大きい。

(2) Nishimura は $E_0 = \infty$ として出て来る極に論拠する。(3.5)で E が消去されるのは ($E \rightarrow 0$ に依るのでなく) $E^{-s-2p-q} = 1$ に依る。

(3) (3.4)の $\mathfrak{M}_2(p, q, s, t)$ において $\phi(p, q, s, t)$ の実体が明示されていない。(3.5)の p -積分も実行されていない。Nishimura の計算は未完に留まっている。

3.3. 著者の方法

電子数ラテラル分関数 $\Pi_2(E_0, E, r, t)$ は次のように計算される。

$$\Pi_2(E_0, E, r, t) = \int_E^{E_0} \pi_2(E_0, E, r, t) dE, \\ \pi_2(E_0, E, r, t) \\ = \int_E^{E_0} f_2(E_0, E, x, t) J_0(rx) 2\pi x dx, \\ f_2(E_0, E, x, t) = \frac{1}{8\pi^3 i} \int_c \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{E} \\ \times \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \left(-\frac{E_s^2 x^2}{4E^2} \right)^m \left(-\frac{\varepsilon}{E} \right)^n \phi_{mn}(s, t),$$

$$\phi_{mn}(s, t) = H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \times \\ \times \frac{(s+2m+n)!}{(s+2m)!} \frac{C_0^{(m)}(s)}{\rho_{2m}(s)} \rho_n(s).$$

この計算を、第 I 稿において著者は実数の範囲で行った。その計算を複素平面上で試みる。

まず Nishimura と同様に $f_2(E_0, E, x, t)$ を解析接続によって複素平面へ拡張する。

$$\begin{aligned} f_2(E_0, E, x, t) &= -\frac{1}{32\pi^5 i} \int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{ds}{E} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \int_\gamma dp \Gamma(-p) \Gamma(p+1) \left(\frac{E_s^2 x^2}{4E^2}\right)^p \rho_A(p, s) \\ &\times \int_\delta dq \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \rho_B(q, s), \quad (3.6) \\ \rho_A(m, s) &= C_0^{(m)}(s) / \rho_{2m}(s), \rho_B(n, s) = \rho_n(s). \\ \text{ハンケル変換は Nishimura の公式を用いる:} \\ \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{4}\right)^p J_0(rx) x dx &= \frac{2\Gamma(p+1)}{\Gamma(-p)} (r^2)^{-p-1}. \\ \pi_2(E_0, E, r, t) &= \int_0^\infty f_2(E_0, E, x, t) J_0(rx) 2\pi x dx \\ &= -\frac{1}{16\pi^4 i} \int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{ds}{E} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \frac{2}{r^2} \\ &\times \int_\gamma dp \Gamma^2(p+1) \left(\frac{E_s^2}{E^2 r^2}\right)^p \rho_A(p, s) \\ &\times \int_\delta dq \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \\ &\times \frac{(s+2p+q)!}{(s+2p)!} \rho_B(q, s). \quad (3.7) \end{aligned}$$

(1) q -積分

Prony 内挿法を用いて

$$\Gamma(q+1) \rho_B(q, s) = \sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^q \quad (3.8)$$

と表す。 q -積分 Q は、

$$Q = \sum_{j=1}^N D_j(s) \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_\delta dq \Gamma(-q) \left(\frac{\varepsilon \beta_j(s)}{E}\right)^q \frac{(s+2p+q)!}{(s+2p)!}.$$

$\Gamma(-q)$ は $q = k$ ($= 0, 1, 2, \dots$) に極をもつ (留数は $(-1)^k / k!$). § 2.4 で述べた積分路をとる。

留数定理を用いて

$$Q = \sum_{j=1}^N D_j(s) \sum_{k=0}^\infty \binom{s+2p+k}{k} \left(-\frac{\varepsilon \beta_j(s)}{E}\right)^k.$$

和の存在条件は $\varepsilon \beta_j(s) / E < 1$. これを満たすように大きな E を対象にする。

$$Q = \sum_{j=1}^N D_j(s) \frac{1}{(1 + \varepsilon \beta_j(s) / E)^{s+2p+1}}.$$

この分母に (3.7) の $E^{-s-1-2p}$ が結びつき分数の分子と分母が分離する。

$$\begin{aligned} \pi_2(E_0, E, r, t) &= -\frac{1}{8\pi^3} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \frac{2}{r^2} \\ &\times \int_\gamma dp \Gamma^2(p+1) \left(\frac{E_s^2}{r^2}\right)^p \rho_A(p, s) \\ &\times \sum_{j=1}^N \frac{D_j(s)}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s+2p+1}}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

和の存在条件は解除される。ここ以降で $E \rightarrow 0$ とできる。

(2) p -積分

Prony 内挿法を用いて

$$\Gamma(p+1) \rho_A(p, s) = \sum_{i=1}^M C_i(s) \alpha_i(s)^p \quad (3.10)$$

と表す。 p -積分 P は,

$$P = \sum_{i=1}^M C_i(s) \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp \Gamma(p+1) \left(\frac{\alpha_i(s) E_s^2}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 r^2} \right)^p.$$

$\Gamma(p+1)$ は $p = -k-1$ ($k=0,1,\dots$) に極をもつ。

留数は $(-1)^k/k!$. 留数定理を用いて,

$$P = \sum_{i=1}^M C_i(s) \frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} e^{-\frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2}}.$$

3.4. ラテラル分布関数の微分型と積分型

ラテラル分布関数の微分型は,

$$\begin{aligned} \pi_2(E_0, E, r, t) &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \frac{2}{E_s^2} \\ &\times \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)} \sum_{j=1}^N \frac{D_j(s)}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s-1}} e^{-\frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

積分型は,

$$\begin{aligned} \Pi_2(E_0, E, r, t) &= \int_E^{E_0} \pi_2(E_0, E, r, t) dE \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \left(\frac{E_0 r}{E_s} \right)^s \frac{ds}{r^2} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} \sum_{j=1}^N D_j(s) \\ &\times \left\{ \Gamma \left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right. \\ &\left. - \Gamma \left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{(E_0 + \varepsilon \beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここに $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ は第 2 種不完全ガ

ンマ関数。⁷⁾

エネルギー積分の上限 E_0 に由来する (3.12) 最後の項は $r \rightarrow \infty$ で無視できる。しかし $r \rightarrow 0$ で発散が生じないことをこの項の存在が保証する。

3.5. 体積積分

ラテラル分布関数の体積は 1 次元遷移曲線を与えなければならない。それを確かめる。

$$V(E_0, E, t) = \int_0^\infty \Pi_2(E_0, E, r, t) 2\pi r dr.$$

$$\int_0^\infty x^\alpha \Gamma(\beta, x) dx = \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha + 1} \quad \text{8) を用いると,}$$

$$V(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times \sum_{j=1}^N D_j(s) \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon \beta_j(s))^s} \right\}.$$

$$(i) \quad E \rightarrow 0 \text{ とし } \sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^{-s} = K_1(s, -s) \quad \text{2), 4), 5)}$$

および $\varepsilon \ll E_0$ を考慮すれば

$$\begin{aligned} V(E_0, 0, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} K_1(s, -s). \end{aligned}$$

閾値ゼロの B 近似遷移曲線が得られる。

(ii) $\varepsilon = 0$ とおき $E \ll E_0$ を対象にし 恒等式

$$\sum_{j=1}^N D_j(s) = 1 \text{ を使えば,}$$

$$V(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}.$$

A 近似遷移曲線を得る。

(i), (ii) から電子数ラテラル分布関数の体積は 1 次元遷移曲線を正しく与えることが確認される。

3.6. 結論 3

(3.12) は第 I 稿 (9.2) と一致する。異なる数学的方

法で得た 2 つの結果が等しいことは双方の計算の正しいことを証明する。

4. 析接続の方法に基づくエネルギー流ラテラル分布関数の計算

エネルギー流ラテラル分布関数；

$$\Pi_E(E_0, E, r, t) = \int_E^{E_0} E \pi_2(E_0, E, r, t) dE$$

を、エネルギー上限を有限とし樹形モデルのもとで解析接続の方法を用いて複素平面で計算する。

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, r, t) &= -\frac{1}{8\pi^3 i} \int_c \int \int \frac{E_0^s ds dp dq}{s+2p+q-1} H_1(s) e^{\lambda(s)t} \\ &\times \frac{2}{r^2} \Gamma^2(p+1) \Gamma(-q) \Gamma(q+1) \\ &\times \left(\frac{1}{E^{s+2p+q-1}} - \frac{1}{E_0^{s+2p+q-1}} \right) \mathcal{E}^q \left(\frac{r^2}{E_s^2} \right)^{-p} \\ &\times \frac{(s+2p+q)!}{(s+2p)!} \rho_A(p, s) \rho_B(q, s), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\rho_A(m, s) = \frac{C_0^{(m)}(s)}{\rho_{2m}(s)}, \quad \rho_B(n, s) = \rho_n(s).$$

次に Prony 内挿法を用いて、

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) \rho_A(p, s) &= \sum_{i=1}^M C_i(s) \alpha_i(s)^p, \\ \Gamma(q+1) \rho_B(q, s) &= \sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^q \end{aligned} \quad \} (4.2)$$

と表す。各 $C_i(s), \alpha_i(s); D_j(s), \beta_j(s)$ は既知量

$\rho_A(m, s), \rho_B(n, s)$ から一意的に決定できる。

(1) q -積分

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dq \Gamma(-q)}{s+2p+q-1} \frac{(s+2p+q)!}{(s+2p)!} \\ &\times \sum_j D_j(s) (\varepsilon \beta_j(s))^q \left(\frac{1}{E^{s+2p+q-1}} - \frac{1}{E_0^{s+2p+q-1}} \right) = A \end{aligned}$$

において $s+2p+q-1=0$ は極を与えない。

$\Gamma(-q)$ は $q=k(=0, 1, \dots)$ に極をもつ。留数は

$(-1)^k/k!$. § 2.4 で述べた積分路をとる。留数定

理を用いると A の積分値 Q は、

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s+2p+k-1} \frac{(s+2p+k)!}{(s+2p)!} \\ &\times \left(\frac{(\varepsilon \beta_j(s)/E)^k}{E^{s+2p-1}} + (E_0 \text{ の項}) \right). \end{aligned}$$

この式にある次の項は右辺のように変形できる：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s+2p+k-1} \frac{(s+2p+k)!}{(s+2p)!} \\ &= \frac{1}{s+2p} \left(\frac{(s+2p+k-1)!}{(s+2p-1)!} - \frac{(s+2p+k-2)!}{(s+2p-2)!} \right) \\ &+ \frac{1}{s+2p-1} \frac{(s+2p+k-2)!}{(s+2p-2)!}. \end{aligned}$$

右辺 3 項に対する k の和は、並びの順に

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{E^{-s-2p+1}}{s+2p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(s+2p+k-1)!}{(s+2p-1)!} \left(\frac{\varepsilon \beta_j(s)}{E} \right)^k \\ &= \frac{1}{s+2p} \left(\frac{1}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s+2p-1}} - \frac{\varepsilon \beta_j(s)}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s+2p}} \right), \\ Q_2 &= -\frac{E^{-s-2p+1}}{s+2p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(s+2p+k-2)!}{(s+2p-2)!} \left(\frac{\varepsilon \beta_j(s)}{E} \right)^k \\ &= -\frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{-s-2p+1}}{s+2p}, \\ Q_3 &= -\frac{E^{-s-2p+1}}{s+2p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(s+2p+k-2)!}{(s+2p-2)!} \left(\frac{\varepsilon \beta_j(s)}{E} \right)^k \end{aligned}$$

$$= -\frac{(E + \varepsilon\beta_j(s))^{-s-2p+1}}{s+2p-1}$$

と表される。3 項の和をとれば

$$Q = \sum_j D_j(s) \times \left\{ \frac{(E + \varepsilon\beta_j(s))^{-s-2p+1}}{s+2p-1} - \frac{\varepsilon\beta_j(s)(E + \varepsilon\beta_j(s))^{-s-2p}}{s+2p} \right\} + (E_0 \text{ の項}).$$

(2) p -積分

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int dp \Gamma(p+1) \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_i(s) \frac{D_j(s)}{(E + \varepsilon\beta_j(s))^s} \times \left(-\frac{\varepsilon\beta_j(s)}{s+2p} + \frac{E + \varepsilon\beta_j(s)}{s+2p-1} \right) \left(\frac{(E + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i E_s^2} \right)^{-p} + (E_0 \text{ の項})$$

の被積分関数は $\frac{\Gamma(p+1)}{2p+a} x^{-p}$ の型である ($a =$

$s, s-1$). $\Gamma(p+1)$ は $p = -k-1$ に極をもつ (留

数は $(-1)^k/k!$). 留数定理を用いて,

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{dp \Gamma(p+1)}{2p+a} x^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{k+1}}{-2k-2+a} = -\frac{x^{a/2}}{2} \gamma\left(1 - \frac{a}{2}, x\right).$$

$\gamma(\alpha, x)$ は第 1 種不完全ガンマ関数⁸⁾ である。

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_i(s) D_j(s)$$

$$\times [\{\varepsilon\beta_j(s) \left(\frac{r^2}{\alpha_i E_s^2} \right)^{s/2} \gamma\left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{(E + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i E_s^2}\right) - \left(\frac{r^2}{\alpha_i E_s^2} \right)^{s/2-1/2} \gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{(E + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i E_s^2}\right)\} + (E_0 \text{ の項})].$$

以上で q, p に関する積分が実行された。

(E_0 の項)を補えば最終の表式が得られる。

$$\Pi_E(E_0, E, r, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \left(\frac{E_0 r}{E_s} \right)^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \times \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} D_j(s) A_{ij}(E, r, s), \quad (4.3)$$

$$A_{ij}(E, r, s) = \frac{\varepsilon\beta_j(s)}{r^2} \times \left\{ \gamma\left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{(E + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2}\right) - \gamma\left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{(E_0 + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2}\right) \right\} - \frac{E_s}{r^3} \alpha_i(s)^{1/2} \times \left\{ \gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{(E + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2}\right) - \gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{(E_0 + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2}\right) \right\}. \quad (4.4)$$

第 2 種の不完全ガンマ関数を使えば,

$$\begin{aligned}
A_{ij}(E, r, s) = & -\frac{\varepsilon\beta_j(s)}{r^2} \\
& \times \left\{ \Gamma \left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{(E + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right. \\
& - \Gamma \left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{(E_0 + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \Big\} \\
& + \frac{E_s}{r^3} \alpha_i(s)^{1/2} \left\{ \Gamma \left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{(E + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right. \\
& \left. - \Gamma \left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{(E_0 + \varepsilon\beta_j(s))^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right\}. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

(4.3)(4.5)は実数の範囲で求めた表式（第 I 稿 (9.3)(9.4)）と一致する。

5. 結論 4

- (1) 電子数および電子エネルギー流のラテラル分布関数は何れも解析接続法で計算した結果と実数の範囲内で計算した結果（第 I 稿）とが一致する。異なる方法で得た 2 つの結果が等しいことは双方の計算の正しいことを証明する。
- (2) 電子数, エネルギー流ラテラル分布関数の何れもが A 近似式を含むことは第 I 稿でみた通り。
- (3) p -積分や q -積分を実行する際, $E_0 = \infty$ としてつくられた極に依るのでなく, ガンマ関数の極を考慮すれば正しい結果が得られる。

(4) $E_0 = \text{有限}$ とする 3 次元理論の定式化に 2 つの意義がある。

(i) Nishimura が論拠とした極が存在しないことを示した。

(ii) 電子数およびエネルギー流のラテラル分布関数が $r \rightarrow 0$ で有界であることを示した。

参考文献

- 1) J.Nishimura, Handbuch der Physik. **XLVI/2**(1967).1.
- 2) 新居誠彦, 足利工業大学研究集録第 **51** 号 (2017.3), 84.
- 3) 日高孝次, 数値積分法 (第四章) (岩波書店, 1942), 67.
- 4) N.Nii, Prog.Theoret.Phys,**99**(No 3),1998,349.
- 5) 新居誠彦, 足利大学研究集録第 **54** 号 (2019.3), 125.
- 6) B.Rossi and K.Greisen, Rev.Mod.Phys. **13**(1941), 240.
- 7) 数学公式**III**, 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信(岩波全書, 1994), 14.
- 8) 前掲書, 15.

※) 足利大学名誉教授

原稿受付日 令和 3 年 1 月 1 日